

Lec 37 再论函数连续性及无穷小 (大) 的比较

37.1 函数极限的四条性质

命题 37.1 (函数极限的四性)

1. 唯一性. $f(x)$ 在 x_0 处有极限, 则极限值唯一.
2. 局部有界性. $f(x)$ 在 x_0 处有极限, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有界.
3. 保号性. $f(x)$ 在 x_0 处有极限, 且极限值大于 (小于) 零, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内大于 (小于) 零.
4. 保序性. $f(x) \geq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 均存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

证明 唯一性:

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A_1, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A_2$. 若 $A_1 > A_2$, 则 $\varepsilon = \frac{A_1 - A_2}{2} > 0$, 则 $\exists \delta_1 > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon$; 又 $\exists \delta_2 > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则 $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |A_1 - A_2| < \varepsilon$, 矛盾.

命题 37.2 (函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的四个充要条件)

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;
2. $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$, i.e. $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续;
3. $f(x) = f(x_0) + \alpha(x), \alpha(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$;
4. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 其中 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

证明

3 \Rightarrow 已知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 令 $\alpha(x) = f(x) - f(x_0)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, 故 $\alpha(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$, 故 $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, 故 $f(x)$ 在 x_0 处连续. $\Leftarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + \alpha(x)) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = f(x_0)$, 故 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

4 $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow 0, f(x) \rightarrow f(x_0) \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

37.2 几个常用的记号

$\delta > 0$ 为常数, 设 $\alpha(x) \rightarrow 0 (\infty), \beta(x) \rightarrow 0 (\infty), x \rightarrow x_0$.

定义 37.1

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 x_0 的某个去心邻域上的函数。如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 $o(g(x))$, 记作 $f(x) = o(g(x))(x \rightarrow x_0)$ 。

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 x_0 的某个去心邻域上的函数。如果 $\exists M, \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$ 在 x_0 的去心邻域上成立, 则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 $O(g(x))$, 记作 $f(x) = O(g(x))(x \rightarrow x_0)$ 。



1. 点 x_0 的 δ 邻域: $U(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$;
2. 点 x_0 的去心 δ 邻域: $U^*(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\} \setminus \{x_0\}$;
3. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$; 表示 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 或者说 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的高阶无穷大;
4. 若 $\exists M > 0, s.t. |\alpha(x)| \leq M|\beta(x)|, \forall x \in U^*(x_0, \delta)$, 则记为 $\alpha(x) = O(\beta(x))$;

注 编者: 这里的比如 $o(x)$ 表示的是函数集合 $\{f | \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x} = 0\}$, 而 $O(x)$ 表示的是函数集合 $\{f | \exists M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U^*(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| \leq M|x|\}$. 也就是说, $x^2 = o(x), x \rightarrow 0$ 表示的实际是 $x^2 \in o(x)$.

例 37.1 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \alpha \neq 0$, 则 $\alpha(x) = O(\beta(x)), x \in U^*(x_0, \delta)$. 此时称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小(大), 且 $\alpha(x) \sim \alpha\beta(x), x \rightarrow x_0$.

例 37.2 设 $a_n = \ln n, b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, c_n = n, d_n = \sqrt[n]{n!}$, 则 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n, b_n, c_n, d_n \rightarrow \infty$, 且 $a_n = o(b_n), b_n = o(c_n), c_n = o(d_n)$.

例 37.3 当 $x \rightarrow x_0$ 时候, 证明:

1. $o(\alpha(x)) \cdot o(\beta(x)) = o(\alpha(x) \cdot \beta(x))$;
2. $O(\alpha(x)) \cdot O(\beta(x)) = O(\alpha(x) \cdot \beta(x))$;
3. $O(o(\alpha(x))) = o(\alpha(x))$;
4. $o(O(\alpha(x))) = o(\alpha(x))$.

注 编者: 这里的 $o(\alpha(x))o(\beta(x))$ 表示的是集合相乘, 即 $o(\alpha(x))o(\beta(x)) = \{fg | f \in o(\alpha(x)), g \in o(\beta(x))\}$.

o, O 仅表示相对的大小关系, 本身不表示绝对的高阶(低阶)无穷大(小). $o(f)$ 的含义实际是所有 f 的无穷小量组成的集合, 因此前面的等号实际含义是 \in . 我们试图用阶定量的表示这种无穷小的比较关系, 但是不是所有无穷小都可以用整数阶来表示.

37.3 间断点

$f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续是指 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上每一点都连续, 即 $f(x)$ 在 (a, b) 的每一点都连续, 且 $f(a+0) = f(a), f(b-0) = f(b)$.

(x) 在 $[a, +\infty)$ 上连续是指 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 的每一点都连续, 且 $f(a+0) = f(a)$.

若 $f(x)$ 在 x_0 处间断, 则

1. $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ 均存在且相等 $\Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点;
2. $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ 均存在且不相等 $\Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点;
3. $f(x_0 - 0) = \infty, f(x_0 + 0) = \infty \Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点;
4. $f(x_0 - 0) = -\infty, f(x_0 + 0)$ 至少有一个不存在, 且 $f(x_0 - 0) \neq \infty, f(x_0 + 0) \neq \infty \Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点中的其它间断点.

37.4 几个特别地非初等函数的连续性

1. 狄利克雷 (Dirichlet) 函数: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$ 则

- (a). 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 且是周期函数, 任意一个正有理数都是 $D(x)$ 的周期, 从而 $D(x)$ 不存在最小正周期;
- (b). $D(x)$ 在任意一点都不连续, 即 $D(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处间断;
- (c). $g(x) = xD(x), x \in \mathbb{R}$, 则 $g(x)$ 仅在 $x = 0$ 处连续.

证明

- (a). $|D(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, 故 $D(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界. 又 $\forall x \in \mathbb{R}, q_0 \in \mathbb{Q}, D(x + q_0) = D(x)$, 故 $D(x)$ 是周期函数.
- (b). 任给一点 x_0 , 我们可以取到一个由理数组成的单调增 (减) 数列 $\{a_n\}$ 收敛到 x_0 , 也可以找到无理数组成的单调增 (减) 数列 $\{b_n\}$ 收敛到 x_0 , 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} D(a_n) = 1$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} D(b_n) = 0$. 所以函数在任何一点的左右极限都不存在, 都是第二类间断点.
- (c). $g(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} |g(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, 故 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 若 $x \neq 0, g(x)$ 在 x 处连续, 则 $D(x) = \frac{g(x)}{x}$ 在 x 处连续, 矛盾, 故 $g(x)$ 仅在 $x = 0$ 处连续.

2. Riemann 函数: $R(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} (p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p, q) = 1); \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$ 则


- (a). $R(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处有定义, 有界且周期为 1;
- (b). $R(x)$ 在任意一点 x_0 处极限为 0, i.e. $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$;
- (c). $R(x)$ 在任一无理点处都连续, 在有理点处都为可去间断点.

3. $\xi(x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^A}, x \in (1, +\infty)$,

$\xi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上处处连续, 处处可微. 且 $\xi(x) \in C^\infty(1, +\infty)$, i.e. $\xi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上处处具有任意阶连续的导函数.

4. $\Gamma(x) \triangleq \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, x > 0$,

$\Gamma(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 处处可微, 且 $\Gamma(x) \in C^\infty(0, +\infty)$.

 **作业** ex2.1:4,5,6(2)(4)(5),7,8,17(1)(3)(4).